

Министерство образования и науки РФ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Самарский государственный университет»  
Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научной работе  
\_\_\_\_\_ А.Ф.Крутов  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2011 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### **«Основы алгебраической геометрии»**

(ОД.А.04; цикл ОД.А.00 «Специальные дисциплины научной специальности»  
основной образовательной программы подготовки аспиранта  
по отрасли 01.00.00 - Физико-математические науки,  
специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Рабочая программа составлена на основании паспорта научной специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел в соответствии с Программой-минимум кандидатского экзамена по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел» по физико-математическим наукам, утвержденной приказом Министерства образования и науки РФ № 274 от 08.10.2007 г., и учебным планом СамГУ по основной образовательной программе аспирантской подготовки.

Составители рабочей программы: Панов Александр Николаевич, профессор, доктор физико-математических наук, Попов Сергей Юрьевич, кандидат физико-математических наук.

Рабочая программа утверждена на заседании ученого совета механико-математического факультета протокол № 1 от 31.08.2011 г.

Председатель ученого совета

« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2011 г.

\_\_\_\_\_

(подпись)

С.Я.Новиков

СОГЛАСОВАНО:

Начальник  
отдела послевузовского  
профессионального образования

« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2011 г.

\_\_\_\_\_

(подпись)

Л.А.Круглова

# 1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе, требования к уровню освоения содержания дисциплины

## 1.1. Цели и задачи изучения дисциплины

**Цель дисциплины** – обеспечение фундаментальной подготовки обучающихся в одной из важнейших областей современной алгебры – алгебраическая геометрия; изучение основ современной коммутативной алгебры; знакомство с историей развития алгебраической геометрии.

### **Задачи дисциплины:**

- продолжить изучение основных алгебраических структур: группы, кольца и модули, поля, алгебры и т. п.;
- рассмотреть основные методы и принципы алгебраической геометрии;
- изучить аффинные многообразия над алгебраически замкнутыми полями, установить их связь с конечно порождёнными алгебрами;
- изучить проективные и квазипроjektивные многообразия над алгебраически замкнутым полем;
- изучить эквивалентные подходы к введению понятия размерности алгебраических многообразий;
- изучить основы теории схем;
- изучить основы теории категорий;
- познакомить обучающихся с основами теории пересечений и различными приложениями алгебраической геометрии в теории чисел, теории кодирования и криптографии.

## 1.2. Требования к уровню подготовки студента, завершившего изучение данной дисциплины

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен

### **Иметь представление:**

- о значении алгебраической геометрии, ее месте в системе разделов классической и современной алгебры;
- об основных современных приложениях алгебраической геометрии как в фундаментальной математике, так и современной прикладной математике;
- о методологических вопросах современной алгебраической геометрии;
- о теории пересечений алгебраических многообразий.

### **Знать:**

- базовую терминологию, относящуюся к алгебраической геометрии и современной коммутативной алгебре, основные понятия и теоремы дисциплины;
- свойства аффинных многообразий над алгебраически замкнутым полем;
- свойства проективных и квазипроjektивных многообразий над алгебраически замкнутым полем, понимать сущность локальных свойств;
- знать конструкцию векторных расслоений;
- основы теории категорий;
- основы теории схем.

### **Уметь:**

- находить координатные кольца аффинных многообразий, поля рациональных функций квазипроjektивных многообразий;
- находить локальные параметры в простых точках алгебраических многообразий;
- устанавливать изоморфность, бирациональную эквивалентность алгебраических многообразий;
- вычислять касательные пространства и касательные конусы в точках аффинного многообразия;
- вычислять характеристики аффинных схем;
- находить индексы пересечений алгебраических кривых.

### **Быть способным:**

- применять основные понятия и теоремы дисциплины при решении как алгебраических задач, так и задач смежных дисциплин;
- самостоятельно изучить разделы современной алгебры: «Теория пересечений», «Когомологии Галуа», «Алгеброгеометрические коды» и т. п.;
- доказывать основные факты алгебраической геометрии.

### 1.3. Связь с предшествующими дисциплинами

Дисциплина «Основы алгебраической геометрии» входит в цикл специальных дисциплин научной специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Фундаментом для изучения дисциплины являются начальные знания по теории групп, теории колец, полей, в частности, алгебре многочленов над полем и полей, а также по линейной алгебре.

### 1.4. Связь с последующими дисциплинами

Понятия и факты, изученные в курсе «Основы алгебраической геометрии», а также методы, изучаемые и используемые в дисциплине, находят дальнейшее применение в специальных курсах по теории пучков, теории алгебраических групп. Знания и навыки, полученные аспирантами при изучении данного курса, необходимы при подготовке и написании диссертации по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

## 2. Содержание дисциплины.

### 2.1. Объем дисциплины и виды учебной работы (в часах и зачетных единицах)

Форма обучения (вид отчетности)

1-3 годы аспирантуры; вид отчетности – экзамен кандидатского минимума.

<b>Вид учебной работы</b>	<b>Объем часов / зачетных единиц</b>
<b>Трудоемкость изучения дисциплины</b>	36/1
<b>Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)</b>	4
в том числе:	
лекции	2
семинары	0
практические занятия	2
<b>Самостоятельная работа аспиранта (всего)</b>	32
в том числе:	
Подготовка к практическим занятиям	4
Изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку	28

## 2.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Название раздела дисциплины	Объем часов / зачетных единиц			
		лекции	семинары	практические занятия	самостоят. работа
1	Категории и функторы	0	0	0	6
2	Многообразия	2	0	0	4
3	Локальные свойства	0	0	2	4
4	Элементы теории пересечений	0	0	0	6
5	Спектры колец и пучки, схемы	0	0	0	6
6	Схемы	0	0	0	6
	<i>Итого</i>	2	0	2	32

## 2.3. Лекционный курс

Многообразия

## 2.4. Практические (семинарские) занятия: по темам:

Локальные свойства

## 2.5. Содержание курса.

### ТЕМА 1. КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ.

Определение категории, объекты и морфизмы. Изоморфизм объектов категории. Примеры категорий. Дуальная категория. Ковариантные и контравариантные функторы. Примеры. Коммутативные диаграммы. Естественное преобразование (морфизм) функтора.

### ТЕМА 2. МНОГООБРАЗИЯ.

Теорема Гильберта о базисе. Теорема Гильберта о нулях. Аффинные многообразия, регулярные функции на аффинном многообразии, морфизмы. Квазипроективные многообразия. Рациональные функции, локальное кольцо точки, регулярные отображения, отображение Веронезе и проектирование. Замкнутость образа проективного многообразия. Конечные отображения. Эквивалентные определения размерности квазипроективного многообразия. Размерность пересечения с гиперповерхностью. Теорема о размерности слоёв.

### ТЕМА 3. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА.

Локальное кольцо точки. Локализация кольца и локальные кольца. Касательное пространство и его инвариантность. Простые и особые точки на алгебраическом многообразии. Касательное расслоение. Теорема о размерности касательного пространства в простой точке. Касательный конус. Локальные параметры в точке и их свойства. Разложение элементов локального кольца в степенные ряды. Замкнутость множества особых точек алгебраического многообразия. Свойства простых точек. Регулярные кольца. Гладкие подмногообразия. Строение бирациональных морфизмов. Раздутие многообразия в точке. Поведение многообразий при раздутии. Исключительные подмногообразия. Структура изоморфизма и бирационального изоморфизма.

### ТЕМА 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ.

Дивизор функции. Локально главные дивизоры. Процедура сдвига носителя дивизора. Дивизоры и рациональные отображения. Пространство, ассоциированное с дивизором. Дивизоры на кривых. Эллиптические кривые. Пересечение в проективном пространстве. Определение индекса пересечения и его свойства: аддитивность, инвариантность относительно эквивалентности. Теорема Безу на кривой. Теорема Безу в проективном пространстве. Общее определение индекса пересечения.

ТЕМА 5. СПЕКТРЫ КОЛЕЦ И ПУЧКИ. Спектр кольца. Точки спектра. Примеры. Свойства точек спектра, поле вычетов в точке. Локальное кольцо точки спектра. Простые (регулярные) точки спектра. Спектральная топология. Неприводимость. Размерность топологического пространства. Определение предпучка. Примеры. Структурный предпучок на аффинной схеме. Определение пучка. Примеры. Пучок, ассоциированный с предпучком. Слои пучка.

ТЕМА 6. СХЕМЫ. Определение схемы. Морфизм схем. Аффинные схемы и их морфизмы. Склеивание схем. Замкнутые подсхемы. Приведённые схемы. Нильпотенты в кольце. Схемы конечного типа. Произведения схем. Расслоенное произведение морфизмов. Групповые схемы.

Простейшие примеры: аддитивная и мультипликативная группы. Алгебраический тор. Отделимые схемы. Определение многообразия.

### 3. Организация текущего и промежуточного контроля обучения.

3.1. Контрольные работы – не предусмотрены.

3.2. Список вопросов для промежуточного тестирования – не предусмотрено.

3.3. Самостоятельная работа

#### 3.3.1. Поддержка самостоятельной работы (сборники тестов, задач, упражнений и др.)

1. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М., Факториал Пресс, 2003 (*Задачи в конце глав*).
2. Львовский С.М. Алгебраическая геометрия. Материалы курсов НМУ, см. <http://www.mccme.ru/ium/ancient/agf96.html>.
3. Аржанцев И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. Свободно распространяемые издания МЦНМО, см. <http://www.mccme.ru/free-books/#arjantsev>.
4. Прасолов В.В. Алгебраические кривые. Материалы курсов НМУ, см. <http://www.mccme.ru/ium/ancient/acf95.html>.
5. Городенцев А.Л. Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Материалы курсов НМУ, см. <http://www.mccme.ru/ium/s03/alg-geom.html>.
6. Харрис Дж. Алгебраическая геометрия, начальный курс. М., МЦНМО, 2006 (*Задачи в конце глав*).
7. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. М., МЦНМО, 2007 (*Задачи в конце глав*).
8. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. Н., ИО НФМИ, 2000 (*Задачи в конце глав*).
9. Полнотекстовые базы данных и ресурсы, доступ к которым обеспечен из кампусной сети СамГУ (сайт научной библиотеки СамГУ, URL: <http://weblib.samsu.ru/level23.html>):

- [Издания Самарского государственного университета](#)
- [Полнотекстовая БД диссертаций РГБ](#)
- [Научная электронная библиотека РФФИ \(Elibrary\)](#)
- [Университетская библиотека ONLINE](#)
- [Университетская информационная система Россия](#)
- [ЭБС «БиблиоТЕХ»](#)
- [Коллекция журналов издательства Оксфордского университета](#)
- [Словари и справочники издательства Оксфордского университета](#)
- [Реферативный журнал ВИНТИ](#)
- [Полнотекстовые статьи из коллекции журналов по математике Научной электронной библиотеки РФФИ \(E-library\) , к которым имеется доступ в сети Интернет: «доклады РАН»; «Известия РАН»; «Прикладная математика и механика»; «Прикладная механика и техническая физика»; «Математические заметки»; «Математический сборник»; «Успехи математических наук» «Журнал вычислительной математики и математической физики»; «Теоретическая и математическая физика»; «Вестник Самарского государственного университета. Серия естественные науки»; «Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки»; «Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика»; «Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН».](#)
- доступ к полнотекстовым материалам БД SpringerLink (Шпрингер) и издательств ELSEVIER (Эльзевир), Cambridge University Press, а также коллекции журналов электронной библиотеки РФФИ. Перечисленные базы данных содержат полные тексты статей журналов: Journal of Algebra, Advances in Mathematics, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society и др.

#### 3.3.2. Тематика рефератов

Написание рефератов по курсу не предусмотрено.

**3.4. Итоговый контроль** проводится в виде экзамена кандидатского минимума.

**4. Технические средства обучения и контроля, использование ЭВМ** (*Перечень обучающих, контролирующих и расчетных программ, диафильмов, слайдфильмов, кино- и телефильмов*).

Программы пакета Microsoft Office, BSD, пакет символьных вычислений Maple, пакет символьных вычислений Mathematica, пакет символьных вычислений MathCad, Maxima-5.11, издательская система LaTeX.

Сайт научной библиотеки СамГУ, с доступом к электронному каталогу и полнотекстовым базам данных – URL: <http://weblib.samsu.ru/level23.html>

**5. Активные методы обучения (деловые игры, научные проекты)** - не предусмотрены.

**6. Материальное обеспечение дисциплины** (*Современные приборы, установки (стенды), необходимость специализированных лабораторий и классов*)

- Компьютерные классы, оснащенные компьютерами класса Pentium 4 с выходом в Интернет и в локальную сеть Самарского государственного университета, а также принтеры, сканеры и ксероксы.

## **7. Литература**

**7.1. Основная** (одновременно изучают дисциплину 10 человек).

1. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М., Факториал Пресс, 2003.
2. Мамфорд Д. Красная книга о многообразиях и схемах. М., МЦНМО, 2007.
3. Харрис Дж. Алгебраическая геометрия, начальный курс. М., МЦНМО, 2006
4. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. М., МЦНМО, 2007
5. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. Н., ИО НФМИ, 2000

## **7.2. Дополнительная**

1. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
2. Каледин Д.Б. Введение в алгебраическую геометрию. Конспект лекций. Материалы НОЦ МИ им. В.А. Стеклова РАН, см. <http://www.mi.ras.ru/~kaledin/noc>.
3. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М., Мир, 2000.
4. Ван дер Варден Б.Л., Алгебра. М., Наука, 1979.
5. Львовский С.М. Алгебраическая геометрия. Материалы курсов НМУ, см. <http://www.mccme.ru/iium/ancient/agh96.html>.
6. Харрис Дж. Алгебраическая геометрия, начальный курс. М., МЦНМО, 2006.
7. Гриффитс Ф.А., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М., Мир, 1982.
8. Фултон У. Теория пересечений. М., Мир, 1989.

**7.3. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины для организации самостоятельной работы студентов.**

1. Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru/>
2. Лекционные курсы НОЦ МИ им. В.А. Стеклова РАН, см. <http://www.mi.ras.ru/>.
3. Материалы курсов Независимого московского университета, см. <http://www.mccme.ru/>.
4. Свободно распространяемые издания Московского центра непрерывного математического образования, см. <http://www.mccme.ru/free-books>.

5. Сайт института им. Л.Эйлера в Санкт-Петербурге <http://lib.lenin.ru/index>
6. Интернет-портал препринтов по математике <http://front.math.ucdavis.edu/math>

## **ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ**

за \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ учебный год

В рабочую программу курса ОД.А.03, «Основы алгебраической геометрии», цикл ОД.А.00 «Обязательные дисциплины» основной образовательной программы подготовки аспиранта по отрасли Физико-математические науки, специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел, вносятся следующие дополнения и изменения: