

Министерство образования и науки РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный университет»
Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
_____ А.Ф.Крутов
« ____ » _____ 2011 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Алгебраическая теория чисел»

(ОД.А.06; цикл ОД.А.00 «Специальные дисциплины научной специальности»
основной образовательной программы подготовки аспиранта
по отрасли 01.00.00 - Физико-математические науки,
специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Рабочая программа составлена на основании паспорта научной специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел в соответствии с Программой-минимум кандидатского экзамена по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел» по физико-математическим наукам, утвержденной приказом Министерства образования и науки РФ № 274 от 08.10.2007 г., и учебным планом СамГУ по основной образовательной программе аспирантской подготовки.

Составители рабочей программы: Панов Александр Николаевич, профессор, доктор физико-математических наук, Азовская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук.

Рабочая программа утверждена на заседании ученого совета механико-математического факультета протокол № 1 от 31.08.2011 г.

Председатель ученого совета

«__» _____ 2011 г.

(подпись)

С.Я.Новиков

СОГЛАСОВАНО:

Начальник
отдела послевузовского
профессионального образования

«__» _____ 2011 г.

(подпись)

Л.А.Круглова

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе, требования к уровню освоения содержания дисциплины.

1.1. Цели и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины – ознакомить аспирантов с арифметикой целых алгебраических чисел, показать сходство и различие классической арифметики и арифметики колец целых чисел конечных расширений поля рациональных чисел. Алгебро-геометрические методы, дзета-функции, ряды Дирихле, позволяют показать иное воплощение традиционных объектов арифметики. Полученные знания помогут пониманию теории алгебраических кривых (теория дивизоров, ветвление, группа классов дивизоров и т. д.), прояснят вопросы арифметики алгебраических многообразий. Аспирантом будут предложено изучить и прикладные аспекты алгебраической теории чисел.

Задачами освоения дисциплины «Алгебраическая теория чисел» являются:

- определение группы классов идеалов поля алгебраических чисел как меры неоднозначности разложения на простые;
- вычисление группы классов идеалов – получение аналитической формулы;
- навыки конкретных вычислений в алгебраической теории чисел.

1.2. Требования к уровню подготовки студента, завершившего изучение данной дисциплины

В результате освоения данной дисциплины обучающийся должен:

Иметь представление:

- об основных направлениях развития теории алгебраических чисел;
- об основных методах исследования в теории алгебраических чисел.

Знать:

• определения основных объектов алгебраической теории чисел: кольцо целых, след и норма элемента, дискриминант поля, единица кольца, идеал, норма идеала, индекс ветвления, группа разложения, группа классов идеалов, характер Дирихле, суммы Гаусса, дзета-функции, ряды Дирихле;

- формулировки основных теорем курса;
- арифметику квадратичного поля и кругового поля;
- основные аналитические формулы и их качественные пояснения;
- приложения алгебраической теории чисел к задачам криптографии.

Уметь:

• находить целые базисы и дискриминанты квадратичных и кубических полей;

• в рамках теоремы Куммера находить разложения главных идеалов, порожденных простыми числами;

• находить фундаментальные единицы для вещественных квадратичных полей;

Быть способным:

- используя константу Минковского, находить число классов квадратичного поля;

- находить группу разложения идеала, находить образующие суммы и произведения идеалов;
- тестировать идеал на простоту.

1.3. Место дисциплины в структуре ООП.

Дисциплина «Алгебраическая теория чисел» входит в цикл специальных дисциплин научной специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Для понимания курса по алгебраической теории чисел аспирант должен знать основные положения курса алгебры, элементарной теории чисел, теории Галуа, теории аналитических функций.

1.4. Связь с последующими дисциплинами

Полученные знания будут использованы в курсах по теории алгебраических групп, арифметике алгебраических многообразий, теоретико-числовых методов в криптографии, теории полей классов, теории локальных полей. Знания и навыки, полученные аспирантами при изучении данного курса, необходимы при подготовке и написании диссертации по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

2. Содержание дисциплины.

2.1. Объем дисциплины и виды учебной работы (в часах и зачетных единицах)

Форма обучения (вид отчетности)

1-3 годы аспирантуры; вид отчетности – экзамен кандидатского минимума.

Вид учебной работы	Объем часов / зачетных единиц
Трудоемкость изучения дисциплины	36/1
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	4
в том числе:	
лекции	2
семинары	0
практические занятия	2
Самостоятельная работа аспиранта (всего)	32
в том числе:	
Подготовка к практическим занятиям	4
Изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку	28

2.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Название раздела дисциплины	Объем часов / зачетных единиц			
		лекции	семинары	практические занятия	самостоят. работа
1	Арифметика полей алгебраических чисел	2	0	2	2
2	Геометрические методы в теории чисел	0	0	0	6
3	Аналитические методы в теории чисел	0	0	0	6
4	Аналитическая формула для числа классов идеалов	0	0	0	6
5	Важные примеры	0	0	0	6
6	Прикладные аспекты алгебраической теории чисел	0	0	0	6
	<i>Итого</i>	2	0	2	32

2.3. Лекционный курс

Арифметика полей алгебраических чисел

2.4. Практические (семинарские) занятия: по темам:

Арифметика полей алгебраических чисел

2.5. Содержание курса.

Раздел 1. Арифметика полей алгебраических чисел

Матричное представление поля алгебраических чисел. Минимальный многочлен элемента поля. Сопряженные элементы. Норма и след элемента, их свойства. Определение целого алгебраического числа. Кольцо целых как свободная абелева группа. Дискриминант поля алгебраических чисел. Идеалы в кольцах целых алгебраических чисел. Примеры неглавных идеалов. Норма идеала. Норма главного идеала. Определение дробного идеала. Операции над идеалами, свойства операций. Максимальность ненулевых простых идеалов. Обратимость ненулевых дробных идеалов. Ненулевые дробные идеалы как мультипликативная группа. Теорема об однозначности разложения целого идеала в произведение простых идеалов и ее следствия. Законы разложения в кольцах целых алгебраических чисел.

Показатели и их свойства. Китайская теорема об остатках. Теорема о двупорожденности идеала. Теорема Куммера. Законы разложения.

Расширения Галуа. Понятие сопряженных идеалов. Законы разложения в случае нормальных расширений. Нормы сопряженных идеалов, группы разложения сопряженных идеалов. Индекс ветвления идеала. Конечность числа разветвленных идеалов.

Раздел 2. Геометрические методы в теории чисел

Решетки. Основной параллелепипед решетки. Критерий полноты решетки. Лемма Минковского о выпуклом теле. Геометрическое изображение алгебраических чисел. Вычисление специальных объемов. Логарифмическое пространство. Геометрическое изображение единиц. Структура группы единиц. Регулятор поля алгебраических чисел. Построение системы основных

единиц. Нахождение основной единицы вещественного квадратичного поля. Группа классов идеалов поля алгебраических чисел. Теорема о конечности числа классов.

Раздел 3. Аналитические методы в теории чисел

Дзета- функция Дедекинда, ее свойства. Характеры Дирихле. L -ряды Дирихле. Основные свойства L -рядов Дирихле. Первое фундаментальное неравенство теории полей классов. L -функции абелевых расширений.

Раздел 4. Аналитическая формула для числа классов идеалов

Фундаментальная область. Вычисление одного объема. Принцип Дирихле. Аналитическая формула для числа классов.

Раздел 5. Важные примеры

Квадратичное поле. Описание арифметики квадратичного поля. Законы разложения в квадратичных полях. Единицы квадратичного поля. Уравнение Пелля. Нахождение фундаментальной единицы поля.

Кубическое поле. Случай нормального и ненормального расширения. Вычисление целого базиса для чисто кубического расширения поля рациональных чисел. Законы разложения в кубических полях.

Круговое поле. Многочлен деления круга, его свойства. Кольцо целых элементов кругового поля. Законы разложения в круговых полях.

Раздел 6. Прикладные аспекты алгебраической теории чисел

Суммы Гаусса и их свойства. Суммы Гаусса как элементы круговых полей. Необходимое условие простоты числа на языке сумм Гаусса.

3. Организация текущего и промежуточного контроля обучения.

3.1. Контрольные работы – не предусмотрены.

3.2. Список вопросов для промежуточного тестирования – не предусмотрено.

3.3. Самостоятельная работа

3.3.1. Поддержка самостоятельной работы (сборники тестов, задач, упражнений и др.)

1. Борович З. И., Шафаревич И. Р. «Теория чисел». - М.: Наука, 1985 (*Задачи в конце глав*).
2. Ленг С. «Алгебра». - М.: Мир, 1968 (*Задачи в конце глав*).
3. Ленг С. «Алгебраические числа». - М.: Мир, 1972 (*Задачи в конце глав*).
4. Полнотекстовые базы данных и ресурсы, доступ к которым обеспечен из кампусной сети СамГУ (сайт научной библиотеки СамГУ, URL: <http://weblib.samsu.ru/level23.html>):

- Издания Самарского государственного университета
- Полнотекстовая БД диссертаций РГБ

- Научная электронная библиотека РФФИ (Elibrary)
- Университетская библиотека ONLINE
- Университетская информационная система Россия
- ЭБС «БиблиоТЕХ»
- Коллекция журналов издательства Оксфордского университета
- Словари и справочники издательства Оксфордского университета
- Реферативный журнал ВИНТИ
- Полнотекстовые статьи из коллекции журналов по математике Научной электронной библиотеки РФФИ (E-library) , к которым имеется доступ в сети Интернет: «доклады РАН»; «Известия РАН»; «Прикладная математика и механика»; «Прикладная механика и техническая физика»; «Математические заметки»; «Математический сборник»; «Успехи математических наук» «Журнал вычислительной математики и математической физики»; «Теоретическая и математическая физика»; «Вестник Самарского государственного университета. Серия естественные науки»; «Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки»; «Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика»; «Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН».
- доступ к полнотекстовым материалам БД SpringerLink (Шпрингер) и издательств ELSEVIER (Эльзевир), Cambridge University Press, а также коллекции журналов электронной библиотеки РФФИ. Перечисленные базы данных содержат полные тексты статей журналов: Journal of Algebra, Advances in Mathematics, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society и др.

3.3.2. Тематика рефератов

Написание рефератов по курсу не предусмотрено.

3.4. Итоговый контроль проводится в виде экзамена кандидатского минимума.

4. Технические средства обучения и контроля, использование ЭВМ (*Перечень обучающих, контролирующих и расчетных программ, диафильмов, слайдфильмов, кино- и телефильмов*).

Программы пакета Microsoft Office, BSD, пакет символьных вычислений Maple, пакет символьных вычислений Mathematica, пакет символьных вычислений MathCad, Maxima-5.11, издательская система LaTeX.

Сайт научной библиотеки СамГУ, с доступом к электронному каталогу и полнотекстовым базам данных – URL: <http://weblib.samsu.ru/level23.html>

5. Активные методы обучения (деловые игры, научные проекты) - не предусмотрены.

6. Материальное обеспечение дисциплины (*Современные приборы, установки (стенды), необходимость специализированных лабораторий и классов*)

- Компьютерные классы, оснащенные компьютерами класса Pentium 4 с выходом в Интернет и в локальную сеть Самарского государственного университета, а также принтеры, сканеры и ксероксы.

7. Литература

7.1. Основная (одновременно изучают дисциплину 10 человек).

1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. «Теория чисел». - М.: Наука, 1985.
2. Кнапп Э. «Эллиптические кривые». - М.: Факториал Пресс, 2004.
3. Ленг С. «Алгебра». - М.: Мир, 1968.
4. Ленг С. «Алгебраические числа». - М.: Мир, 1972.

7.2. Дополнительная литература

1. Манин Ю. И., Панчишкин А. А. «Введение в современную теорию чисел». - М.: МЦНМО, 2009.

7.3. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины для организации самостоятельной работы студентов.

1. Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru/>
2. Лекционные курсы НОЦ МИ им. В.А. Стеклова РАН, см. <http://www.mi.ras.ru/>.
3. Материалы курсов Независимого московского университета, см. <http://www.mccme.ru/>.
4. Свободно распространяемые издания Московского центра непрерывного математического образования, см. <http://www.mccme.ru/free-books>.
5. Сайт института им. Л.Эйлера в Санкт-Петербурге <http://lib.lenin.ru/index>
6. Интернет-портал препринтов по математике <http://front.math.ucdavis.edu/math>

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ

за _____ / _____ учебный год

В рабочую программу курса ОД.А.03, «Алгебраическая теория чисел», цикл ОД.А.00 «Обязательные дисциплины» основной образовательной программы подготовки аспиранта по отрасли Физико-математические науки, специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел, вносятся следующие дополнения и изменения:

