

Министерство образования и науки РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный университет»
Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
_____ А.Ф.Крутов
« ____ » _____ 2011 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Гомологическая алгебра и теория пучков»

(ОД.А.07; цикл ОД.А.00 «Дисциплины по выбору аспиранта»
основной образовательной программы подготовки аспиранта
по отрасли 01.00.00 - Физико-математические науки,
специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Рабочая программа составлена на основании паспорта научной специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел в соответствии с Программой-минимум кандидатского экзамена по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел» по физико-математическим наукам, утвержденной приказом Министерства образования и науки РФ № 274 от 08.10.2007 г., и учебным планом СамГУ по основной образовательной программе аспирантской подготовки.

Составители рабочей программы: Панов Александр Николаевич, профессор, доктор физико-математических наук, Попов Сергей Юрьевич, кандидат физико-математических наук.

Рабочая программа утверждена на заседании ученого совета механико-математического факультета протокол № 1 от 31.08.2011 г.

Председатель ученого совета

« ___ » _____ 2011 г.

(подпись)

С.Я.Новиков

СОГЛАСОВАНО:

Начальник
отдела послевузовского
профессионального образования

« ___ » _____ 2011 г.

(подпись)

Л.А.Круглова

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе, требования к уровню освоения содержания дисциплины.

1.1. Цели и задачи изучения дисциплины.

Цель дисциплины – обеспечение фундаментальной подготовки обучающихся в одной из важнейших областей современной алгебры – гомологическая алгебра; изучение пучков как одного из основных средств научно-исследовательской и научно-изыскательной деятельности в различных областях современной математики.

Задачи дисциплины:

- рассмотреть основные идеи, лежащие в основе гомологической алгебры;
- изучить основы алгебраической топологии;
- изучить теорию пучков;
- изучить классические теории когомологий: сингулярные когомологии, когомологии де Рама, когомологии Александра-Спеньера;
- рассмотреть когомологии с коэффициентами в пучке;
- рассмотреть приложения спектральных последовательностей;
- рассмотреть приложения когомологий пучков в бирациональной геометрии алгебраических групп.

1.2. Требования к уровню подготовки студента, завершившего изучение данной дисциплины

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен

Иметь представление:

- о значении гомологической алгебры и алгебраической топологии, их месте в системе разделов классической и современной математики;
- о значении понятия пучка как одного из основных средств исследования в современной алгебре;
- о современных теориях когомологий и их приложениях;
- о методах современной алгебраической геометрии, основанных на теории пучков и теории когомологий.

Знать:

- базовую терминологию, относящуюся к гомологической алгебре и теории пучков, основные понятия и теоремы дисциплины;
- основы теории категорий;
- теорию сингулярных гомологий;
- теорию когомологий де Рама;
- теорию когомологий с коэффициентами в пучке;
- приложения различных теорий когомологий в алгебраической геометрии и топологии.

Уметь:

- доказывать точность последовательности пучков;
- вычислять прямую сумму пучков, прямой и обратный образ систем пучков;
- вычислять пучки, ассоциированные с данным предпучком;
- вычислять сингулярные когомологии топологических многообразий;
- вычислять когомологические бирациональные инварианты алгебраических торов;
- оценивать когомологическую размерность квазипроективных многообразий;
- вычислять эйлерову характеристику когерентных пучков и арифметический род алгебраических многообразий.

Быть способным:

- применять основные понятия и теоремы дисциплины при решении как алгебраических задач, так и задач смежных дисциплин;
- самостоятельно изучить разделы современной алгебры: «Теория пересечений», «Когомологии Галуа», «K-теория» и т. п.;
- доказывать основные факты гомологической алгебры и проводить вычисления в произвольных теориях гомологий.

1.3. Связь с предшествующими дисциплинами

Дисциплина «Гомологическая алгебра и теория пучков» входит в цикл дисциплин по выбору аспиранта научной специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Фундаментом для изучения дисциплины являются начальные знания по теории групп, теории колец, полей, в частности, алгебре многочленов над полем и полей, а также по линейной алгебре. Кроме того, эта дисциплина существенно использует знания, полученные при изучении дисциплины «Основы алгебраической геометрии».

1.4. Связь с последующими дисциплинами

Понятия и факты, изученные в курсе «Гомологическая алгебра и теория пучков», а также методы, изучаемые и используемые в дисциплине, находят дальнейшее применение в специальных курсах по теории алгебраических групп и теории торических многообразий. Знания и навыки, полученные аспирантами при изучении данного курса, могут быть использованы при подготовке и написании диссертации по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

2. Содержание дисциплины.**2.1. Объем дисциплины и виды учебной работы (в часах и зачетных единицах)**

Форма обучения (вид отчетности)

1-3 годы аспирантуры; вид отчетности – экзамен кандидатского минимума.

Вид учебной работы	Объем часов / зачетных единиц
Трудоемкость изучения дисциплины	72/2
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	8
в том числе:	
лекции	4
семинары	0
практические занятия	4
Самостоятельная работа аспиранта (всего)	64
в том числе:	
Подготовка к практическим занятиям	26
Изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку	40

2.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Название раздела дисциплины	Объем часов / зачетных единиц			
		лекции	семинары	практические занятия	самостоят. работа
1	Категории и функторы	2	0	2	10
2	Пучки	0	0	0	14
3	Классические теории гомологий	0	0	0	14
4	Когомологии с коэффициентами в пучке	2	0	2	14
5	Когомологии алгебраических многообразий	0	0	0	12
	<i>Итого</i>	4	0	4	64

2.3. Лекционный курс

Категории и функторы

Когомологии с коэффициентами в пучке

2.4. Практические (семинарские) занятия: по темам:

Категории и функторы

Когомологии с коэффициентами в пучке

2.5. Содержание курса.

ТЕМА 1. КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ.

Определение категории, объекты и морфизмы. Изоморфизм объектов категории. Примеры категорий. Дуальная категория. Ковариантные и контравариантные функторы. Примеры. Коммутативные диаграммы. Естественное преобразование (морфизм) функтора. Аддитивные

категории. Проективный и инъективный объект категории. Абелевы категории. Пример – категория предпучков абелевых групп над топологическим пространством.

ТЕМА 2. ПУЧКИ.

Определение предпучка. Примеры. Определение пучка. Постоянный пучок. Слой пучка. Морфизм предпучков. Критерий изоморфизма пучков. Ядро, коядро и образ морфизма пучков. Пучок, ассоциированный с предпучком. Точная последовательность пучков. Факторпучок. Прямой и обратный образ пучка. Прямая сумма пучков. Прямой и обратный пределы семейств пучков. Плоские пучки. Пучки модулей на схемах. Квазикогерентные и когерентные пучки на схемах. Когерентность структурного пучка. Свойства квазикогерентных и когерентных пучков. Скручивающий пучок Серра на проективной схеме.

ТЕМА 3. КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ГОМОЛОГИЙ.

Теория сингулярных гомологий. Сингулярный симплекс. Сингулярная цепь. Граничный оператор. Циклы и границы. Группа сингулярных гомологий. Цепной комплекс, цепное отображение. Пример – вычисление сингулярных гомологий топологических двумерных многообразий (хирургия поверхностей). Классические теории когомологий: когомологии Александра – Спеньера, сингулярные когомологии, когомологии де Рама.

ТЕМА 4. КОГОМОЛОГИИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПУЧКЕ.

Градуированные модули над кольцом. Гомоморфизмы степени r . Комплекс над основным кольцом. Цепные комплексы, циклы и границы. Группа гомологий комплекса данной размерности. Коцепные комплексы. Кограницы и коциклы. Группа когомологий данной размерности для данного коцепного комплекса. Дифференциальные пучки и резольвенты. Каноническая резольвента. Пучковые когомологии. Спектральная последовательность дифференциального пучка. Некоторые приложения спектральных последовательностей.

ТЕМА 5. КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ.

Когомологии нётеровых аффинных схем. Явное вычисление когомологий скручивающих пучков Серра на проективном пространстве. Эйлерова характеристика когерентного пучка на проективном многообразии. Арифметический род проективной схемы. Теорема двойственности Серра для когомологий когерентных пучков на проективной схеме. Когомологические бирациональные инварианты линейных алгебраических групп. Вялая резольвента для алгебраического тора. Явное вычисление когомологических бирациональных инвариантов алгебраических торов размерностей 1, 2, 3 и 4, составление таблиц когомологических бирациональных инвариантов для максимальных торов без аффекта в алгебраических группах классического и исключительного типов.

3. Организация текущего и промежуточного контроля обучения.

3.1. Контрольные работы – не предусмотрены.

3.2. Список вопросов для промежуточного тестирования – не предусмотрено.

3.3. Самостоятельная работа

3.3.1. Поддержка самостоятельной работы (сборники тестов, задач, упражнений и др.)

1. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. Н., ИО НФМИ, 2000 (*Задачи в конце глав*).
2. Натанзон С.М. Введение в пучки, расслоения и классы Черна. Свободно распространяемые издания МЦНМО, см. <http://www.mccme.ru/free-books/#natanzon> (*Задачи в конце глав*)
3. Вик Дж.У. Теория гомологий. М., МЦНМО, 2005 (*Задачи в конце глав*).
4. Полнотекстовые базы данных и ресурсы, доступ к которым обеспечен из кампусной сети СамГУ (сайт научной библиотеки СамГУ, URL: <http://weblib.samsu.ru/level23.html>):

- [Издания Самарского государственного университета](#)
- [Полнотекстовая БД диссертаций РГБ](#)
- [Научная электронная библиотека РФФИ \(Elibrary\)](#)
- [Университетская библиотека ONLINE](#)
- [Университетская информационная система Россия](#)
- [ЭБС «БиблиоТЕХ»](#)
- [Коллекция журналов издательства Оксфордского университета](#)
- [Словари и справочники издательства Оксфордского университета](#)
- [Реферативный журнал ВИНТИ](#)
- [Полнотекстовые статьи из коллекции журналов по математике Научной электронной библиотеки РФФИ \(E-library\) , к которым имеется доступ в сети Интернет: «доклады РАН»; «Известия РАН»; «Прикладная математика и механика»; «Прикладная механика и техническая физика»; «Математические заметки»; «Математический сборник»; «Успехи математических наук» «Журнал вычислительной математики и математической физики»; «Теоретическая и математическая физика»; «Вестник Самарского государственного университета. Серия естественные науки»; «Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки»; «Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика»; «Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН».](#)
- доступ к полнотекстовым материалам БД SpringerLink (Шпрингер) и издательств ELSEVIER (Эльзевир), Cambridge University Press, а также коллекции журналов электронной библиотеки РФФИ. Перечисленные базы данных содержат полные тексты статей журналов: Journal of Algebra, Advances in Mathematics, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society и др.

3.3.2. Тематика рефератов

Написание рефератов по курсу не предусмотрено.

3.4. Итоговый контроль проводится в виде экзамена кандидатского минимума.

4. Технические средства обучения и контроля, использование ЭВМ (*Перечень обучающих, контролирующих и расчетных программ, диафильмов, слайдфильмов, кино- и телефильмов*).

Программы пакета Microsoft Office, BSD, пакет символьных вычислений Maple, пакет символьных вычислений Mathematica, пакет символьных вычислений MathCad, Maxima-5.11, издательская система LaTeX.

Сайт научной библиотеки СамГУ, с доступом к электронному каталогу и полнотекстовым базам данных – URL: <http://weblib.samsu.ru/level23.html>

5. Активные методы обучения (деловые игры, научные проекты) - не предусмотрены.

6. Материальное обеспечение дисциплины (*Современные приборы, установки (стенды), необходимость специализированных лабораторий и классов*)

- Компьютерные классы, оснащенные компьютерами класса Pentium 4 с выходом в Интернет и в локальную сеть Самарского государственного университета, а также принтеры, сканеры и ксероксы.

7. Литература

7.1. Основная (одновременно изучают дисциплину 10 человек).

1. Вик Дж.У. Теория гомологий. М., МЦНМО, 2005.
2. Прасолов В.В. Элементы теории гомологий. М., МЦНМО, 2006.
3. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. Н., ИО НФМИ, 2000.
4. Натанзон С.М. Введение в пучки, расслоения и классы Черна. Свободно распространяемые издания МЦНМО, см. <http://www.mccme.ru/free-books/#natanzon>.
5. Воскресенский В.Е. Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп. М., МЦНМО, 2009.

7.2. Дополнительная литература

1. Данилов. Когомологии алгебраических многообразий. Итоги науки и техники. Сер. Совр. проблемы матем. Фунд. напр., 1989, т. 35, с. 5-130, в свободном доступе на <http://www.mathnet.ru/rus/intf124>.
2. Казарян М.Э. Расслоения, характеристические классы и кобордизмы. Записки лекций. Материалы курсов НОЦ МИ им. В.А. Стеклова РАН, см. <http://www.mi.ras.ru/~kazarian/papers/chcl06.pdf>.
3. Кузнецов А.Г. Гомологическая алгебра. Записки лекций. Материалы курсов НОЦ МИ им. В.А. Стеклова РАН, см. <http://www.mi.ras.ru/~akuznet/homalg/index-homalg.htm>.

4. Бредон Г. Теория пучков. М., Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
5. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М., Изд-во иностранной лит-ры, 1961.
6. Серр Ж.-П. Собрание сочинений. Том 2, М., НМУ, МЦНМО, 2004.
7. Мак-Клири Дж. Путеводитель по спектральным последовательностям. М., МЦНМО, 2008.

7.3. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины для организации самостоятельной работы студентов.

1. Городенцев А.Л. Гомологическая алгебра. Материалы курсов НМУ, см. <http://www.mccme.ru/ium/s02/homalg.html>.
2. Казарян М.Э. Введение в теорию гомологий. Лекционные курсы НОЦ МИ им. В.А. Стеклова РАН, см. <http://www.mi.ras.ru/noc/lectures/03kazarian.pdf>.
3. Львовский С.М. Введение в когомологии пучков. Материалы курсов НМУ, см. <http://www.mccme.ru/ium/f97/sheaves.html>.
4. Крутиков Ю.Ю. Бирациональные инварианты тора без аффекта в исключительной группе типа F_4 // Вестник СамГУ, № 6 (72), 2009. С. 58 – 68. Свободно доступно по ссылке: <http://vestnik.ssu.samara.ru/est/content/math.html> Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru/>
5. Лекционные курсы НОЦ МИ им. В.А. Стеклова РАН, см. <http://www.mi.ras.ru/>.
6. Материалы курсов Независимого московского университета, см. <http://www.mccme.ru/>.
7. Свободно распространяемые издания Московского центра непрерывного математического образования, см. <http://www.mccme.ru/free-books>.
8. Сайт института им. Л.Эйлера в Санкт-Петербурге <http://lib.lenin.ru/index>
9. Интернет-портал препринтов по математике <http://front.math.ucdavis.edu/math>

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ

за _____ / _____ учебный год

В рабочую программу курса ОД.А.05, «Гомологическая алгебра и теория пучков», цикл ОД.А.00 «Обязательные дисциплины» основной образовательной программы подготовки аспиранта по отрасли Физико-математические науки, специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел, вносятся следующие дополнения и изменения:

- 1.