

Министерство образования и науки РФ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Самарский государственный университет»  
Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научной работе  
\_\_\_\_\_ А.Ф.Крутов  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2011 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### «Нормированные поля и квадратичные формы»

(ОД.А.08; цикл ОД.А.00 «Дисциплины по выбору аспиранта»  
основной образовательной программы подготовки аспиранта  
по отрасли 01.00.00 - Физико-математические науки,  
специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Самара 2011

Рабочая программа составлена на основании паспорта научной специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел в соответствии с Программой-минимум кандидатского экзамена по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел» по физико-математическим наукам, утвержденной приказом Министерства образования и науки РФ № 274 от 08.10.2007 г., и учебным планом СамГУ по основной образовательной программе аспирантской подготовки.

Составители рабочей программы: Панов Александр Николаевич, профессор, доктор физико-математических наук, Азовская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук.

Рабочая программа утверждена на заседании ученого совета механико-математического факультета протокол № 1 от 31.08.2011 г.

Председатель ученого совета

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

\_\_\_\_\_ С.Я.Новиков  
(подпись)

СОГЛАСОВАНО:

Начальник  
отдела послевузовского  
профессионального образования

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2011 г.

\_\_\_\_\_ Л.А.Круглова  
(подпись)

# 1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе, требования к уровню освоения содержания дисциплины

## 1.1. Цели и задачи изучения дисциплины

Цель курса – ознакомить аспирантов с нормированными полями, нормированиями поля рациональных чисел и его конечных расширений. Изложить учащимся основы арифметики и анализа в локальных полях. На примере квадратичных форм раскрыть суть принципа Минковского-Хассе. Полученные знания помогут пониманию теории диофантовых уравнений, прояснят вопросы арифметики алгебраических многообразий. Параллельное изучение теории алгебраических кривых позволит проследить аналогии между числовыми и функциональными полями.

Задачами освоения дисциплины «**Нормированные поля и квадратичные формы над полем рациональных чисел**» являются:

- введение нормирований и пополнений поля рациональных чисел как инструмента решения диофантовых задач;
- сведение диофантовой задачи в локальном случае к задаче над конечным полем;
- навыки конкретных вычислений;
- знакомство с основами анализа, арифметики локальных полей.

## 1.2. Требования к уровню подготовки студента, завершившего изучение данной дисциплины

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен

### **Иметь представление:**

- об основных способах и принципах решения диофантовой задачи;
- об аналогиях в изучении полей алгебраических функций полей алгебраических чисел.

### **Знать:**

- основные понятия курса: нормированное поле, виды нормирований, кольцо нормирования, идеал нормирования, пополнение поля по норме, представление элементов полного нормированного поля, символ Гильберта;
- формулировки основных теорем курса;
- квадратичный закон взаимности, символ Гильберта, его свойства, формулу произведения;
- об особенностях  $p$ -адического анализа и арифметики;
- принцип Минковского-Хассе.

### **Уметь:**

- находить пределы последовательностей, суммировать ряды, извлекать корни (несколько цифр в разложении), применять лемму Гензеля в поле  $p$ -адических чисел;
- самостоятельно проводить конкретные вычисления, необходимые для доказательства свойств и теорем курса;
- определять эквивалентны или нет бинарные квадратичные формы, отвечать на вопрос о представлении рационального числа квадратичной формой от двух или трех переменных, вычислять символ Гильберта, доказывать его свойства;

### **Быть способным:**

- формулировать и решать на основе изученной техники классические задачи о представлении чисел квадратичными формами

## 1.3. Связь с предшествующими дисциплинами

Дисциплина «Нормированные поля и квадратичные формы» входит в цикл дисциплин по выбору аспиранта научной специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Фундаментом для изучения дисциплины являются основные положения курса алгебры, элементарной теории чисел, теории Галуа, теории аналитических функций.

#### 1.4. Связь с последующими дисциплинами

Понятия и факты, изученные в курсе «Нормированные поля и квадратичные формы», а также методы, изучаемые и используемые в дисциплине, находят дальнейшее применение в специальных курсах по теории алгебраических групп, арифметике алгебраических многообразий, теоретико-числовых методов в криптографии, теории полей классов, теории локальных полей. Знания и навыки, полученные аспирантами при изучении данного курса, необходимы при подготовке и написании диссертации по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

## 2. Содержание дисциплины.

### 2.1. Объем дисциплины и виды учебной работы (в часах и зачетных единицах)

Форма обучения (вид отчетности)

1-3 годы аспирантуры; вид отчетности – экзамен кандидатского минимума.

<b>Вид учебной работы</b>	<b>Объем часов / зачетных единиц</b>
<b>Трудоемкость изучения дисциплины</b>	72/2
<b>Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)</b>	4
в том числе:	
лекции	2
семинары	0
практические занятия	2
<b>Самостоятельная работа аспиранта (всего)</b>	68
в том числе:	
Подготовка к практическим занятиям	10
Изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку	58

## 2.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Название раздела дисциплины	Объем часов / зачетных единиц			
		лекции	семинары	практические занятия	самостоят. работа
1	Нормированные поля	2	0	0	8
2	Поле $p$ -адических чисел и его кольцо целых	0	0	0	10
3	Общие теоремы о квадратичных формах	0	0	0	10
4	Формы над конечными полями	0	0	0	10
5	Квадратичные формы над полями $p$ -адических чисел	0	0	0	10
6	Теорема Минковского-Хассе	0	0	0	10
7	Задачи для самостоятельного решения	0	0	2	10
	<i>Итого</i>	2	0	2	68

## 2.3. Лекционный курс

Нормированные поля

## 2.4. Практические (семинарские) занятия: по темам:

Задачи для самостоятельного решения

## 2.5. Содержание курса.

### Раздел 1. Нормированные поля

Определение нормированного поля. Простейшие свойства норм. Архимедовы и неархимедовы нормирования. Эквивалентные определения неархимедовой нормы. Примеры нормированных полей. Нормирования конечного поля. Нормирования поля рациональных чисел. Нормирования поля рациональных функций. Эквивалентные нормирования. Описание нормирований поля рациональных чисел.  $p$ -адическое нормирование поля рациональных чисел. Показатели, их свойства. Теорема Островского. Полные и неполные нормированные поля. Процедура пополнения поля по норме.

### Раздел 2. Поле $p$ -адических чисел и его кольцо целых

Представление  $p$ -адических чисел рядами. Идеал нормирования, кольцо целых  $p$ -адических чисел – пример локального кольца. Единицы кольца, описание единиц кольца. Запись  $p$ -адического числа в виде произведения единицы и степени униформизирующего элемента. Особенности  $p$ -адической метрики. Сходимость  $p$ -адических рядов. Экспонента и логарифм в поле  $p$ -адических чисел. Описание квадратов в поле  $p$ -адических чисел. Индекс подгруппы квадратов в мультипликативной группе поля. Корни из единицы в полях  $p$ -адических чисел. Лемма Гензеля и ее применение.

### Раздел 3. Общие теоремы о квадратичных формах

Ранг, матрица, матричная запись квадратичной формы. Эквивалентные квадратичные формы, некоторые инварианты классов эквивалентности. Теорема Лагранжа. Представление элементов поля квадратичными формами. Представление нуля квадратичной формой, некоторые свойства и следствия этих представлений. Общие свойства бинарных квадратичных форм. Прямая сумма квадратичных форм. Теорема о сокращении Витта. Классы Витта.

### Раздел 4. Формы над конечными полями

Теоремы о числе решений сравнений: теорема Варнинга, теорема Шевалле, теоремы о числе решений системы сравнений. Вычисление группы классов Витта квадратичных форм над конечными полями.

### **Раздел 5. Квадратичные формы над полями $p$ -адических чисел**

Теорема о представлении нуля  $p$ -адической квадратичной формой, и ее следствия. Бинарные квадратичные формы и их свойства. Символ Гильберта, его свойства. Описание эквивалентности бинарных форм с помощью символа Гильберта. Формула произведения для символов Гильберта.

### **Раздел 6. Теорема Минковского-Хассе**

Доказательство теоремы Минковского-Хассе. Эквивалентность квадратичных форм над полем рациональных чисел. Классические задачи о представлении чисел суммами двух, трех и четырех квадратов.

### **Раздел 7. Задачи для самостоятельного решения**

1. Вычислить группу классов Витта квадратичных форм над полями  $p$ -адических чисел;
2. Доказать компактность кольца целых  $p$ -адических чисел;
3. Используя символ Хассе, решить вопрос о представлении нуля квадратичными формами от трех и четырех переменных;
4. Изучить кривую Зельмана, для которой нарушается принцип Минковского-Хассе.

## **3. Организация текущего и промежуточного контроля обучения.**

**3.1. Контрольные работы** – не предусмотрены.

**3.2. Список вопросов для промежуточного тестирования** – не предусмотрено.

**3.3. Самостоятельная работа**

### **3.3.1. Поддержка самостоятельной работы (сборники тестов, задач, упражнений и др.)**

1. Борович З. И., Шафаревич И. Р. «Теория чисел». - М.: Наука, 1985 (*Задачи в конце глав*).
2. Коблиц Н. « $p$ -адические числа,  $p$ -адический анализ и дзета-функции». - М.: Мир, 1982 (*Задачи в конце глав*).
3. Серр Ж.-П. «Курс арифметики». - М.: Мир, 1972 (*Задачи в конце глав*).
4. Касселс Дж. «Рациональные квадратичные формы». – М.: Мир, 1982 (*Задачи в конце глав*).
5. Ленг С. «Алгебраические числа». - М.: Мир, 1972 (*Задачи в конце глав*).
6. Полнотекстовые базы данных и ресурсы, доступ к которым обеспечен из кампусной сети СамГУ (сайт научной библиотеки СамГУ, URL: <http://weblib.samsu.ru/level23.html>):

- [Издания Самарского государственного университета](#)
- [Полнотекстовая БД диссертаций РГБ](#)
- [Научная электронная библиотека РФФИ \(Elibrary\)](#)
- [Университетская библиотека ONLINE](#)
- [Университетская информационная система Россия](#)
- [ЭБС «БиблиоТЕХ»](#)
- [Коллекция журналов издательства Оксфордского университета](#)
- [Словари и справочники издательства Оксфордского университета](#)
- [Реферативный журнал ВИНТИ](#)
- [Полнотекстовые статьи из коллекции журналов по математике Научной электронной библиотеки РФФИ \(E-library\) , к которым имеется доступ в сети Интернет: «доклады РАН»; «Известия РАН»; «Прикладная математика и механика»; «Прикладная механика и техническая физика»; «Математические заметки»; «Математический сборник»; «Успехи математических наук» «Журнал вычислительной математики и математической физики»; «Теоретическая и математическая физика»; «Вестник Самарского государственного университета. Серия естественные науки»; «Вестник Самарского государственного](#)

технического университета. Серия: Физико-математические науки»; «Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика»; «Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН».

- доступ к полнотекстовым материалам БД SpringerLink (Шпрингер) и издательств ELSEVIER (Эльзевир), Cambridge University Press, а также коллекции журналов электронной библиотеки РФФИ. Перечисленные базы данных содержат полные тексты статей журналов: Journal of Algebra, Advances in Mathematics, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society и др.

### **3.3.2. Тематика рефератов**

Написание рефератов по курсу не предусмотрено.

### **3.4. Итоговый контроль** проводится в виде экзамена кандидатского минимума.

### **4. Технические средства обучения и контроля, использование ЭВМ** (*Перечень обучающих, контролирующих и расчетных программ, диафильмов, слайдфильмов, кино- и телефильмов*).

Программы пакета Microsoft Office, BSD, пакет символьных вычислений Maple, пакет символьных вычислений Mathematica, пакет символьных вычислений MathCad, Maxima-5.11, издательская система LaTeX.

Сайт научной библиотеки СамГУ, с доступом к электронному каталогу и полнотекстовым базам данных – URL: <http://weblib.samsu.ru/level23.html>

### **5. Активные методы обучения (деловые игры, научные проекты)** - не предусмотрены.

### **6. Материальное обеспечение дисциплины** (*Современные приборы, установки (стенды), необходимость специализированных лабораторий и классов*)

- Компьютерные классы, оснащенные компьютерами класса Pentium 4 с выходом в Интернет и в локальную сеть Самарского государственного университета, а также принтеры, сканеры и ксероксы.

## **7. Литература**

### **7.1. Основная** (одновременно изучают дисциплину 10 человек).

7. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. «Теория чисел». - М.: Наука, 1985.
8. Коблиц Н. «р-адические числа, р-адический анализ и дзета-функции». - М.: Мир, 1982.
9. Серр Ж.-П. «Курс арифметики». - М.: Мир, 1972.
10. Касселс Дж. «Рациональные квадратичные формы». – М.: Мир, 1982.
11. Ленг С. «Алгебраические числа». - М.: Мир, 1972.

### **7.2. Дополнительная литература**

1. Манин Ю. И., Панчишкин А. А. «Введение в современную теорию чисел». - М.: МЦНМО, 2009.
2. «Алгебраическая теория чисел» под ред. Дж. Касселса и А. Фрелиха – М.: Мир, 1969.

### **7.3. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины для организации самостоятельной работы студентов.**

1. Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru/>
2. Лекционные курсы НОЦ МИ им. В.А. Стеклова РАН, см. <http://www.mi.ras.ru/>.
3. Материалы курсов Независимого московского университета, см. <http://www.mccme.ru/>.

4. Свободно распространяемые издания Московского центра непрерывного математического образования, см. <http://www.mccme.ru/free-books>.
5. Сайт института им. Л.Эйлера в Санкт-Петербурге <http://lib.lenin.ru/index>
6. Интернет-портал препринтов по математике <http://front.math.ucdavis.edu/math>

## **ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ**

за \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ учебный год

В рабочую программу курса ОД.А.08, «Нормированные поля и квадратичные формы», цикл ОД.А.00 «Обязательные дисциплины» основной образовательной программы подготовки аспиранта по отрасли Физико-математические науки, специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел, вносятся следующие дополнения и изменения: