

Министерство образования и науки РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный университет»
Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
_____ А.Ф.Крутов
« ____ » _____ 2011 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Торические многообразия»

(ОД.А.09; цикл ОД.А.00 «Дисциплины по выбору аспиранта»
основной образовательной программы подготовки аспиранта
по отрасли 01.00.00 - Физико-математические науки,
специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Рабочая программа составлена на основании паспорта научной специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел в соответствии с Программой-минимум кандидатского экзамена по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел» по физико-математическим наукам, утвержденной приказом Министерства образования и науки РФ № 274 от 08.10.2007 г., и учебным планом СамГУ по основной образовательной программе аспирантской подготовки.

Составители рабочей программы: Панов Александр Николаевич, профессор, доктор физико-математических наук, Попов Сергей Юрьевич, кандидат физико-математических наук.

Рабочая программа утверждена на заседании ученого совета механико-математического факультета протокол № 1 от 31.08.2011 г.

Председатель ученого совета

« ___ » _____ 2011 г.

_____ С.Я.Новиков
(подпись)

СОГЛАСОВАНО:

Начальник
отдела послевузовского
профессионального образования

« ___ » _____ 2011 г.

_____ Л.А.Круглова
(подпись)

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе, требования к уровню освоения содержания дисциплины

1.1. Цели и задачи изучения дисциплины

Цель дисциплины – обеспечение фундаментальной подготовки обучающихся в одной из важнейших областей современной алгебраической геометрии – торические многообразия; изучение методов комбинаторной геометрии.

Задачи дисциплины:

- продолжить изучение алгебраической геометрии и теории пучков посредством рассмотрения торических многообразий;
- установить связь между выпуклыми симплицальными многогранниками и торическими многообразиями;
- изучить торические многообразия малой размерности;
- изучить теорию пересечений для торических многообразий;
- рассмотреть алгебраическую геометрию проективных многообразий над алгебраически незамкнутым полем на примере торических многообразий.

1.2. Требования к уровню подготовки студента, завершившего изучение данной дисциплины

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен

Иметь представление:

- о роли торических многообразий в классификации алгебраических многообразий;
- об основных современных приложениях торических многообразий как в фундаментальной математике, так и современной прикладной математике;
- о методологических вопросах современной алгебраической геометрии;
- о теории форм алгебраических многообразий.

Знать:

- базовую терминологию, относящуюся к торическим многообразиям, основные понятия и теоремы дисциплины;
- классификацию торических многообразий малой размерности;
- конструкцию векторных расслоений;
- классификацию многогранников Фано малых размерностей;
- алгоритмы вычисления индексов пересечений на торических многообразиях.

Уметь:

- восстанавливать торическое многообразие по вееру;
- записывать уравнения торических многообразий по заданному многограннику Фано;
- вычислять индекс пересечения и самопересечения дивизоров на двумерных торических многообразиях Фано;
- вычислять эйлерову характеристику когерентных пучков на торическом многообразии;
- вычислять бирациональные инварианты торических многообразий;
- строить торическое многообразие по заданному алгебраическому тору.

Быть способным:

- применять основные понятия и теоремы дисциплины при решении как алгебраических задач, так и задач смежных дисциплин;
- самостоятельно изучить разделы современной алгебраической геометрии, топологии, комбинаторной геометрии: «Классификация особенностей торических многообразий», «Торические действия в топологии и комбинаторике» и т. п.;
- доказывать основные свойства торических многообразий.

1.3. Связь с предшествующими дисциплинами

Дисциплина «Торические многообразия» входит в цикл дисциплин по выбору аспиранта научной специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Фундаментом для изучения дисциплины являются знания, полученные при изучении профессиональных дисциплин «Алгебра» и «Линейная алгебра и геометрия». Данная дисциплина дополняет дисциплину «Основы алгебраической геометрии», а также существенно использует знания обучающихся, полученные при изучении дисциплин «Алгебраические группы» и «Гомологическая алгебра и теория пучков».

1.4. Связь с последующими дисциплинами

Знания и навыки, полученные аспирантами при изучении данного курса, необходимы при подготовке и написании диссертации по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

2. Содержание дисциплины.

2.1. Объем дисциплины и виды учебной работы (в часах и зачетных единицах)

Форма обучения (вид отчетности)

1-3 годы аспирантуры; вид отчетности – экзамен кандидатского минимума.

Вид учебной работы	Объем часов / зачетных единиц
Трудоемкость изучения дисциплины	36/1
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего)	4
в том числе:	
лекции	2
семинары	0
практические занятия	2
Самостоятельная работа аспиранта (всего)	32
в том числе:	
Подготовка к практическим занятиям	4
Изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку	28

2.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Название раздела дисциплины	Объем часов / зачетных единиц			
		лекции	семинары	практические занятия	самостоят. работа
1	Аффинные торические многообразия	0	0	2	6
2	Общие торические многообразия	2	0	0	10
3	Торические многообразия над произвольным полем	0	0	0	8
4	Теория пересечений на торических многообразиях	0	0	0	8
	<i>Итого</i>	2	0	2	32

2.3. Лекционный курс

Общие торические многообразия

2.4. Практические (семинарские) занятия: по темам:

Аффинные торические многообразия

2.5. Содержание курса.

ТЕМА 1. АФФИННЫЕ ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ.

Конус, грани конуса, размерность конуса. Решётки и полугруппы. Многогранники, f -векторы и соотношения Дена – Соммервилля, g -теорема. Циклический многогранник. Теоремы о верхней и нижней границе количества граней многогранника. Кольцо Стенли – Райснера простого многогранника. Определение аффинного торического многообразия. Замкнутые вложения аффинных торических многообразий. Размерность и гладкость аффинного торического многообразия. Примеры негладких торических многообразий.

ТЕМА 2. ОБЩИЕ ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ.

Определение веера. Торическое многообразие, ассоциированное с данным веером. Склейка аффинных торических многообразий. Определение многогранника Фано. Граница Воскресенского – Клячко для количества вершин произвольного многогранника Фано. Классификация многогранников Фано на плоскости. Вееры, определяемые многогранниками Фано, и связанные с ними торические многообразия Фано. Разбиение конуса и раздутие торического многообразия. Критерии проективности и гладкости торического многообразия в терминах соответствующих вееров. Обратимые пучки на торическом многообразии. Канонический пучок на торическом многообразии. Когомологии обратимых пучков на торических многообразиях. Когомологии канонического пучка.

ТЕМА 3. ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛЕМ.

Определение алгебраического тора над незамкнутым полем. Поле разложения алгебраического тора, группа разложения алгебраического тора. Алгебра регулярных функций алгебраического тора. Определение торического многообразия для случая незамкнутого поля. Введение понятия формы алгебраического многообразия. Инвариантные конусы и вееры. Формы двумерных многообразий Фано. Классификация трёхмерных многогранников Фано и вычисление их групп автоморфизмов. Каноническая последовательность Воскресенского для алгебраического тора. Основной бирациональный инвариант алгебраического тора и его торического многообразия. Бирациональные инварианты торических многообразий. Примеры нерациональных торических многообразий.

ТЕМА 4. ТЕОРИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ НА ТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ.

Кольцо Чжоу алгебраического многообразия. Рациональная эквивалентность циклов на многообразии. Теорема об образующих кольца Чжоу торического многообразия. Задание пересечений на торическом многообразии. Теорема о структуре кольца Чжоу полного гладкого торического многообразия над полем комплексных чисел. Характеристика Эйлера – Пуанкаре для когерентного пучка на полном многообразии. Классы Чженя и их свойства. Классы Чженя и Тодда

для торических многообразий. Вычисления кольца Чжоу для двумерных многообразий Фано, исключительные прямые на поверхностях Фано.

3. Организация текущего и промежуточного контроля обучения.

3.1. Контрольные работы – не предусмотрены.

3.2. Список вопросов для промежуточного тестирования – не предусмотрено.

3.3. Самостоятельная работа

3.3.1. Поддержка самостоятельной работы (сборники тестов, задач, упражнений и др.)

1. Аржанцев И.В. Торические многообразия (задачи к экзамену). Материалы курсов НМУ, см. <http://www.mccme.ru/iium/f99/toric.html>.
2. Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. М., МЦНМО, 2004 (*Задачи в конце глав*).
3. Полнотекстовые базы данных и ресурсы, доступ к которым обеспечен из кампусной сети СамГУ (сайт научной библиотеки СамГУ, URL: <http://weblib.samsu.ru/level23.html>):

- [Издания Самарского государственного университета](#)
- [Полнотекстовая БД диссертаций РГБ](#)
- [Научная электронная библиотека РФФИ \(Elibrary\)](#)
- [Университетская библиотека ONLINE](#)
- [Университетская информационная система Россия](#)
- [ЭБС «БиблиоТЕХ»](#)
- [Коллекция журналов издательства Оксфордского университета](#)
- [Словари и справочники издательства Оксфордского университета](#)
- [Реферативный журнал ВИНТИ](#)
- [Полнотекстовые статьи из коллекции журналов по математике Научной электронной библиотеки РФФИ \(E-library\) , к которым имеется доступ в сети Интернет: «доклады РАН»; «Известия РАН»; «Прикладная математика и механика»; «Прикладная механика и техническая физика»; «Математические заметки»; «Математический сборник»; «Успехи математических наук» «Журнал вычислительной математики и математической физики»; «Теоретическая и математическая физика»; «Вестник Самарского государственного университета. Серия естественные науки»; «Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки»; «Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика»; «Труды Математического института им. В.А.Стеклова РАН».](#)
- доступ к полнотекстовым материалам БД SpringerLink (Шпрингер) и издательств ELSEVIER (Эльзевир), Cambridge University Press, а также коллекции журналов электронной библиотеки РФФИ. Перечисленные базы данных содержат полные тексты статей журналов: Journal of Algebra, Advances in Mathematics, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society и др.

3.3.2. Тематика рефератов

Написание рефератов по курсу не предусмотрено.

3.4. Итоговый контроль проводится в виде экзамена кандидатского минимума.

4. Технические средства обучения и контроля, использование ЭВМ (*Перечень обучающих, контролирующих и расчетных программ, диафильмов, слайдфильмов, кино- и телефильмов*).

Программы пакета Microsoft Office, BSD, пакет символьных вычислений Maple, пакет символьных вычислений Mathematica, пакет символьных вычислений MathCad, Maxima-5.11, издательская система LaTeX.

Сайт научной библиотеки СамГУ, с доступом к электронному каталогу и полнотекстовым базам данных – URL: <http://weblib.samsu.ru/level23.html>

5. Активные методы обучения (деловые игры, научные проекты) - не предусмотрены.

6. Материальное обеспечение дисциплины (Современные приборы, установки (стенды), необходимость специализированных лабораторий и классов)

- Компьютерные классы, оснащенные компьютерами класса Pentium 4 с выходом в Интернет и в локальную сеть Самарского государственного университета, а также принтеры, сканеры и ксероксы.

7. Литература

7.1. Основная (одновременно изучают дисциплину 10 человек).

1. Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. М., МЦНМО, 2004.
2. Воскресенский В.Е. Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп. М., МЦНМО, 2009.
3. Cox D., Little J.B., Schenk H. Toric varieties, свободный доступ на странице <http://www.cs.amherst.edu/~dac/toric.html>.

7.2. Дополнительная литература

1. Воскресенский В.Е. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп // Вестник СамГУ, 1997, № 2, стр. 18 – 98. Доступно по ссылке: <http://vestnik.ssu.samara.ru/est/content/math.html>
2. Воскресенский В.Е. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп // Вестник СамГУ, 1997, № 4, стр. 5 – 68. Доступно по ссылке: <http://vestnik.ssu.samara.ru/est/content/math.html>
3. Данилов В.И. Геометрия торических многообразий. УМН, 1978, т. 33, №2, с. 85-135, в свободном доступе на странице <http://www.mathnet.ru/rus/rm3391>.
4. D. Cox. Lectures on toric varieties, свободный доступ на странице <http://www.cs.amherst.edu/~dac/lectures/coxcimpa.pdf>.
5. Батырев В.В. Трёхмерные торические многообразия Фано // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, вып. 4. С. 704 – 717.
6. Воскресенский В.Е., Клячко А.А. Торические многообразия Фано и системы корней // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, вып. 2. С. 237 -263.
7. Фултон У. Теория пересечений. М., Мир, 1989.
8. D. Cox. Lectures on toric varieties, свободный доступ на странице <http://www.cs.amherst.edu/~dac/lectures/coxcimpa.pdf>.
9. Попов С.Ю. Решётки Галуа и их бирациональные инварианты // Вестник СамГУ, 1998, № 4(10). С. 71 – 83. Свободно доступно по ссылке: <http://vestnik.ssu.samara.ru/est/content/math.html>
10. Крутиков Ю.Ю. Аффинные представления трёхмерных алгебраических торов // Вестник СамГУ, 2007, № 7(57). С. 92 – 106. Свободно доступно по ссылке: <http://vestnik.ssu.samara.ru/est/content/math.html>

7.3. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины для организации самостоятельной работы студентов.

1. Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru/>
2. Лекционные курсы НОЦ МИ им. В.А. Стеклова РАН, см. <http://www.mi.ras.ru/>.
3. Материалы курсов Независимого московского университета, см. <http://www.mccme.ru/>.
4. Свободно распространяемые издания Московского центра непрерывного математического образования, см. <http://www.mccme.ru/free-books>.
5. Сайт института им. Л.Эйлера в Санкт-Петербурге <http://lib.lenin.ru/index>

6. Интернет-портал препринтов по математике <http://front.math.ucdavis.edu/math>

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ В РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЕ

за _____ / _____ учебный год

В рабочую программу курса ОД.А.09, «Горические многообразия», цикл ОД.А.00 «Обязательные дисциплины» основной образовательной программы подготовки аспиранта по отрасли Физико-математические науки, специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел, вносятся следующие дополнения и изменения: